

УДК 004.942:504.3.054

Математические модели и алгоритмы выбора оптимального маршрута передвижения в городах с учетом загрязнения воздуха

Продолжение. Начало читайте в № 5/2020.

Рассмотрены вопросы разработки математического обеспечения системы поддержки принятия решений при выборе оптимального маршрута передвижения людей в городах с учетом загрязнения атмосферного воздуха. Предложены математические модели и алгоритмы решения задач поиска оптимальных маршрутов облета беспилотным летательным аппаратом и объезда передвижной лабораторией перекрестков для взятия проб воздуха и поиска оптимального маршрута из одной точки города в другую по критерию минимизации вреда организму от нахождения в зонах повышенного содержания примесей в атмосферном воздухе.

Введение. В статье продолжено рассмотрение вопросов разработки математического обеспечения создаваемой системы поддержки принятия решений при выборе оптимального маршрута передвижения людей в городах с учетом загрязнения атмосферного воздуха. В системе требуется оценивать степень загрязнения воздуха на любом маршруте движения. Первой математической задачей системы принятия решений является задача определения количества примесей в атмосферном воздухе для каждого перекрестка города. Вторая математическая задача – определение перекрестков, которые будут выступать дополнительными пунктами взятия проб атмосферного воздуха. Математические модели и методы решения этих задач рассмотрены в работе [1].

Третьей математической задачей создаваемой системы принятия решений является поиск оптимального маршрута облета беспилотным летательным аппаратом (БЛА) всех перекрестков, в которых

А.А. КАРПУК,

доцент кафедры программного обеспечения сетей телекоммуникаций, к. т. н., доцент

О.П. РЯБЫЧИНА,

старший преподаватель кафедры программного обеспечения сетей телекоммуникаций, магистр техники и технологии

Белорусская государственная академия связи

Ключевые слова:

загрязнение воздуха, граф перекрестков города, задача коммивояжера, кратчайший путь между вершинами графа.

надо взять пробы воздуха, а четвертой – задача поиска оптимального маршрута проезда передвижной лаборатории по перекресткам, в которых надо взять пробы воздуха. Наконец, пятая математическая задача создаваемой системы принятия решений – поиск оптимального маршрута из одной точки города в другую по критерию минимизации вреда организму от нахождения в зонах повышенного содержания примесей в атмосферном воздухе.

Поиск оптимального маршрута облета БЛА всех перекрестков, в которых надо взять пробы воздуха

Построим математическую модель задачи поиска оптимального маршрута облета БЛА всех перекрестков, в которых надо взять пробы воздуха. В качестве исходных данных используем граф $G(P, D)$ и вектор переменных z_i , $i = 1, p$, полученный в результате решения задачи выбора дополнительных пунктов взятия проб воздуха. Напомним, что множество вершин графа $G(P, D)$ $P = \{P_i, i = 1, p\}$ состоит из множества точек города N , в которых взяты пробы воздуха, и множества всех перекрестков города, не входящих в множество N . Считаем, что первые p вершин графа – это точки из N , а следующие $(p - n)$ вершин – это перекрестки города. Каждому ребру графа, соединяющему вершины P_i ,

$i \in \overline{1, p}$, и P_i , $j \in \overline{1, p}$, поставлена в соответствие величина d_{ij} – расстояние между соответствующими точками города по прямой линии. С каждой вершиной графа связана переменная $z_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, p}$, значение которой равно 1, если в соответствующей точке города требуется взять пробу воздуха, и равно 0 в противном случае.

Удалим из графа G первые n вершин, а также все вершины, соответствующие перекресткам, на которых не требуется брать дополнительные пробы воздуха (это вершины с номерами $i \in \overline{n+1, p}$, для которых $z_i = 0$). Добавим в граф G дополнительную вершину, соответствующую точке взлета и приземления БЛА. Соответственно, в матрицу D добавим строку и столбец с расстояниями от этой точки до остальных вершин графа по прямой линии. Перенумеруем вершины графа и переставим строки и столбцы матрицы D таким образом, чтобы точка взлета и приземления БЛА была первой вершиной графа. Полученный полный неориентированный граф, состоящий из p' вершин, обозначим $G'(P', D')$, элементы матрицы расстояний между вершинами обозначим d'_{ij} , $i = \overline{1, p'}$, $j = \overline{1, p'}$.

В терминах введенных обозначений задача поиска оптимального маршрута облета БЛА всех перекрестков, в которых надо взять пробы воздуха, сводится к нахождению маршрута в графе G' , начинающегося и заканчивающегося в первой вершине, проходящего через каждую вершину графа только 1 раз и имеющего минимальную длину. Эта задача известна в теории графов как задача нахождения гамильтонова цикла минимального веса во взвешенном графе, или задача коммивояжера. В данном случае рассматриваемый граф содержит небольшое количество вершин (не более нескольких десятков), поэтому для решения задачи коммивояжера можно применить точные методы, в частности классические методы отсечения, ветвей и границ или динамического программирования [2].

Одна из наиболее известных математических моделей задачи коммивояжера в виде задачи дискретной оптимизации строится следующим образом. С каждым ребром графа G' свяжем переменную $x_{ij} \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, p'}$, $j = \overline{1, p'}$, значение которой равно 1, если это ребро принадлежит искомому гамильтонову циклу, и равно 0 в противном случае. Тогда целевую функцию задачи можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{p'} \sum_{j=1}^{p'} d'_{ij} x_{ij} \rightarrow \min. \quad (1)$$

Каждая вершина входит в гамильтонов цикл ровно один раз, что записывается в виде следующей системы ограничений:

$$\sum_{j=1}^{p'} x_{ij} = 1 \quad \text{для всех } i = \overline{1, p'}, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{p'} x_{ij} = 1 \quad \text{для всех } j = \overline{1, p'}. \quad (3)$$

Ограничениям (2) и (3) удовлетворяет любой гамильтонов цикл в графе, но им удовлетворяет также любая совокупность отдельных несвязанных циклов в графе, в которые каждая вершина входит ровно один раз. Для исключения этой ситуации применяется прием с введением дополнительных переменных u_i , $i = \overline{1, p'}$. Чаще всего под физическим смыслом переменной u_i понимается порядковый номер следования вершины с номером i в искомом гамильтоновом цикле, хотя в общем случае под u_i понимается любое число. Переменные u_i , $i = \overline{1, p'}$ должны удовлетворять следующим условиям: $u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1$ для всех $i \in \overline{1, p'}$, $j \in \overline{1, p'}$, $i \neq j$. (4)

Таким образом, оптимальный по расстоянию маршрут полета БЛА определяется переменными $x_{ij} \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, p'}$, при которых достигается минимум целевая функция (1) и выполняются условия (2)–(4).

Поиск оптимального маршрута проезда передвижной лаборатории по перекресткам, в которых надо взять пробы воздуха. Построим математическую модель задачи поиска оптимального маршрута проезда передвижной лаборатории по перекресткам, в которых надо взять пробы воздуха. В качестве исходных данных используем граф $G(P, D)$ и вектор переменных z_i , $i = \overline{1, p}$, полученный в результате решения задачи выбора дополнительных точек взятия проб воздуха. Добавим в граф G дополнительную вершину, соответствующую точке выезда и возвращения передвижной лаборатории. Эта точка должна находиться на одной из улиц, имеющей выход хотя бы на один перекресток. Удалим из графа G вершины с номерами $i \in \overline{1, n}$, которые не соответствуют перекресткам города (этим вершинам соответствуют пункты взятия проб воздуха внутри микрорайонов и на территориях предприятий). На основе графа G построим ориентированный граф $S(P, U)$, вершинами которого являются точка выезда и возвращения передвижной лаборатории и все перекрестки города. Через S обозначим количество вершин этого графа. Между вершинами с номерами $i \in \overline{1, S}$ и $j \in \overline{1, S}$ существует дуга, направленная от вершины с номером i к вершине с номером j , если между соответствующими перекрестками имеется отрезок улицы, по которой разрешено движение в данном направлении. Длина этого отрезка улицы записывается в матрицу

U в качестве элемента u_{ij} . Если между вершинами с номерами $i \in \overline{1, s}$ и $j \in \overline{1, s}$ отсутствует дуга, то $u_{ij} = 0$. С каждой вершиной графа S свяжем метку $z_i \in \{0, 1\}$, $i \in \overline{1, s}$, значение которой равно 1, если на соответствующем перекрестке города требуется взять пробу воздуха, и равно 0 в противном случае.

В терминах введенных обозначений задача поиска оптимального маршрута проезда передвижной лаборатории по перекресткам, в которых надо взять пробы воздуха, сводится к нахождению пути в ориентированном графе S , начинающегося и заканчивающегося в заданной вершине, проходящего через каждую помеченную вершину графа только один раз и имеющего минимальную длину. Другими словами, надо найти в ориентированном графе цикл минимальной длины, проходящий через указанные вершины. В такой постановке задача в теории графов практически не рассматривалась. С учетом того, что количество вершин графа может измеряться несколькими тысячами, использовать точные методы решения задачи невозможно. Можно попытаться модернизировать метод поиска в глубину для нахождения нескольких таких циклов и выбрать из них цикл минимальной длины.

Предлагается более простой метод решения задачи поиска оптимального маршрута проезда передвижной лаборатории по перекресткам, в которых надо взять пробы воздуха. Он состоит в сведении этой задачи к задаче поиска оптимального маршрута облета БЛА всех перекрестков, в которых надо взять пробы воздуха. Метод основан на следующем очевидном свойстве оптимального маршрута: если оптимальный маршрут проходит через две вершины, соответствующие точкам взятия проб воздуха, и между этими вершинами в оптимальном маршруте нет других вершин, соответствующих точкам взятия проб воздуха, то оптимальному маршруту принадлежит кратчайший путь между этими вершинами в графе $S(P, U)$. Это свойство оптимального маршрута легко доказывается от противного.

Построим ориентированный полный граф $G(P, D)$ следующим образом. В качестве первой вершины возьмем вершину графа $S(P, U)$, соответствующую точке выезда и возвращения передвижной лаборатории. В качестве остальных вершин графа $G(P, D)$ возьмем вершины графа $S(P, U)$, соответствующие перекресткам города, в которых следует взять пробы воздуха (эти вершины имеют

метку $z_i = 1$, $i \in \overline{1, s}$). Для всех $i = \overline{1, p'}$, $j = \overline{1, p'}$, $i \neq j$ значение d_{ij} элемента матрицы D вычислим

как длину кратчайшего пути между соответствующими вершинами графа $S(P, U)$. Для нахождения кратчайшего пути можно использовать алгоритм Дейкстры, алгоритм Беллмана – Форда, алгоритм поиска A^* , алгоритм Флойда – Уоршелла или алгоритм Джонсона [3]. Решим задачу нахождения гамильтонова цикла минимального веса в построенном ориентированном взвешенном графе. Количество вершин этого графа составляет несколько десятков, поэтому задачу можно решить точными методами отсечения, ветвей и границ или динамического программирования. Найденный гамильтонов цикл даст оптимальный порядок объезда перекрестков, на которых требуется взять пробы воздуха. Порядок движения между каждой возможной парой точек взятия проб воздуха определяется кратчайшими путями между соответствующими вершинами графа $S(P, U)$, найденными при построении матрицы D .

Поиск оптимального маршрута из одной точки города в другую точку. Построим математическую модель задачи поиска оптимального маршрута из одной точки города в другую точку по критерию минимизации вреда организму от нахождения в зонах повышенного содержания примесей в атмосферном воздухе. В качестве исходных данных используем граф $S(P, U)$ и вектор переменных z_i , $i = \overline{1, s}$, полученные в результате решения задачи поиска оптимального маршрута проезда передвижной лаборатории по перекресткам, в которых надо взять пробы воздуха. Удалим из графа $S(P, U)$ вершину, соответствующую точке выезда и возвращения передвижной лаборатории. Через k обозначим количество примесей, которые учитываются при оценке вреда организму.

Создадим $(s-1) \times k$ матрицу Q , элемент которой q_{ij} , $i = \overline{1, s-1}$, $j = \overline{1, k}$, равен количественной оценке содержания в воздухе на перекрестке с номером i примеси с номером j . Для тех q_{ij} , $i = \overline{1, s-1}$, $j = \overline{1, k}$, для которых $z_i = 1$, значения q_{ij} определяются в результате анализа проб воздуха. Значения остальных q_{ij} вычислим по интерполяционным формулам кригинга.

Создадим $(s-1) \times (s-1)$ матрицу V , элемент которой v_{ij} , $i = \overline{1, s-1}$, $j = \overline{1, s-1}$, равен количественной оценке вреда организму человека, наносимого за 1 час при нахождении его на отрезке улицы от перекрестка с номером i до перекрестка с номером j . Значение v_{ij} зависит от содержания всех примесей в воздухе на рассматриваемых перекрестках, которое записано в строках матрицы Q с номерами i и j . Значение v_{ij} вычисляется только для тех пар перекрестков, для которых в графе $S(P, U)$ существует дуга, направленная от

вершины с номером i к вершине с номером j . Значения остальных v_{ij} положим равными 0. Заменяем в графе $S(P, U)$ матрицу U на матрицу V , получив тем самым граф $S(P, V)$. Каждая вершина этого графа соответствует перекрестку города, ненулевое значение элемента v_{ij} , $i = 1, s-1$, $j = 1, s-1$, указывает на наличие дуги от вершины с номером i к вершине с номером j . Весовой коэффициент дуги v_{ij} равен количественной оценке вреда организму человека, наносимого за 1 час нахождения на соответствующем отрезке улицы.

Все описанные вычисления для получения графа $S(P, V)$ проводятся предварительно до решения задачи поиска оптимального маршрута из одной точки города в другую точку. Матрица V хранится в базе данных системы и пересчитывается каждый раз при получении результатов анализа новых проб атмосферного воздуха. Матрица пересчитывается также в случае аварийных ситуаций с обнаружением аварийных выбросов загрязняющих примесей атмосферного воздуха. В этом случае в качестве пунктов взятия проб воздуха добавляются точки выброса и дополнительные точки, в которых берутся пробы воздуха.

Входными данными для решения задачи поиска оптимального маршрута из одной точки города в другую являются координаты этих точек и скорость движения μ . Если начальная или конечная точка маршрута не находится на перекрестке, то в граф $S(P, V)$ добавляются одна или две дополнительные вершины, соответствующие начальной и конечной точкам маршрута. Эти точки должны находиться на одной из улиц, имеющей выход хотя бы на один перекресток. Для каждой добавленной точки добавляется строка в матрицу Q и вычисляются значения элементов строки, а затем добавляются строка и столбец в матрицу V и вычисляются значения их элементов. Наконец, матрица V для проведения расчетов заменяется матрицей V' , каждый ненулевой элемент которой v'_{ij} вычисляется по правилу $v'_{ij} = v_{ij} (u_{ij} / \mu)$, где u_{ij} – длина отрезка улицы между вершинами с номерами i и j .

В терминах введенных обозначений задача поиска оптимального маршрута из одной точки города в другую точку по критерию минимизации вреда организму от нахождения в зонах повышенного содержания примесей в атмосферном воздухе сводится к известной задаче нахождения кратчайшего пути в графе $S(P, V)$ между вершинами, соответствующими начальной и конечной точкам маршрута.

Заключение. Таким образом, в состав математического обеспечения системы поддержки принятия решений при выборе оптимального маршрута

передвижения людей в городах с учетом загрязнения атмосферного воздуха должны входить математические модели и методы решения задач поиска оптимального маршрута:

облета БЛА всех перекрестков, в которых надо взять пробы воздуха. Для решения следует использовать известные точные алгоритмы решения задачи коммивояжера;

проезда передвижной лаборатории по перекресткам, в которых надо взять пробы воздуха. Для решения предложен метод ее сведения к задаче поиска оптимального маршрута облета БЛА всех перекрестков, в которых надо взять пробы воздуха;

из одной точки города в другую. Для решения следует использовать известные алгоритмы нахождения кратчайшего пути между заданными вершинами графа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карпук, А.А. Математические модели и алгоритмы оценки степени загрязнения воздуха в городах / А.А. Карпук, О.П. Рябычина // Веснік сув'язі. – 2020. – № 5 (163). – С. 36–39.
2. Меламед, И.И. Задача коммивояжера. Точные методы / И.И. Меламед, С.И. Сергеев, И.Х. Сигал // Автоматика и телемеханика. – 1989. – Вып. 10. – С. 3–29.
3. Алгоритмы: построение и анализ, 3-е изд. Пер. с англ. / Т.Х. Томас [и др.]. – М.: Вильямс, 2013. – 1328 с.

The issues of the development of mathematical support for the decision support system when choosing the optimal route for the movement of people in cities, taking into account atmospheric air pollution. Mathematical models and algorithms are proposed for solving the problems of finding optimal routes for flying an unmanned aerial vehicle and bypassing a mobile laboratory of intersections for taking air samples and finding an optimal route from one point of the city to another point according to the criterion of minimizing harm to the body from being in areas with a high content of impurities in the atmospheric air.

Keywords: air pollution, city intersection graph, traveling salesman problem, shortest path between graph vertices.

Получено 08.10.2020.

